IV Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи

I тур

Задача 1. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 2BC$. На стороні AB прямокутника побудувано рівносторонній трикутник ABE так, що його сторони AE і BE перетинають відрізок CD. Точка M — середина BE. Знайдіть $\angle MCD$.

Задача 2. Відомо, що кути трикутника ABC відносяться як $1 : 3 : 5$. Знайдіть кут між бісектрисою найбільшого кута трикутника та прямою, що містить висоту, проведену до найменшої сторони трикутника.

Задача 3. Є лінійка і „заіржавлений“ циркуль, з допомогою якого можна побудувати коло радіуса R. Точка K знаходиться від прямої l на відстані, яка більша ніж R. Як з допомогою цієї лінійки і цього циркуля провести пряму, яка проходить через точку K і перпендикулярна прямій l?

(*Міша Сидоренко, Катя Сидоренко, Родіон Осокін*)

Задача 4. В трикутнику ABC ($AB \neq AC$) проведено медіану AM. Точка P — основа перпендикуляру, опущеного на відрізок AM із точки B. На відрізку AM вибрали таку точку Q, що $AQ = 2PM$. Доведіть, що $\angle CQM = \angle BAM$.

Задача 5. Відомо, що у чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, окрім того $\angle A = \angle C$. Доведіть, що $AB = BC$, $CD = DA$.

(*Олена Артемчук*)

Задача 6. Нехай $ABCD$ — квадрат, точка E — середина сторони BC. Точка F належить стороні AB, причому $DE \perp EF$. Точка G лежить всередині квадрата, причому $GF = FE$ і $GF \perp FE$. Доведіть, що:

а) DE — бісектриса кута $\angle FDC$;

б) FG — бісектриса кута $\angle AFD$;

в) точка G — центр кола, вписаного в трикутник ADF.

(*Ercole Suppa, Italy*)

IV Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

8–9 класи (поглиблене вивчення математики)

I тур

Задача 1. Дано прямокутний трикутник ABC, точка M — середина гіпотенузи AB. Навколо трикутника BCM описано коло, яке перетинає відрізок AC в точці Q, що відмінна від C. Виявилося, що відрізок QA вдвічі більший за катет BC. Знайдіть гострі кути трикутника ABC.

(*Микола Мороз*)

Задача 2. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ побудовано рівносторонній трикутник BDE, причому точка C розташована всередині трикутника BDE. Нехай M — середина BE. Знайдіть кут між прямими MC і DE.

(*Дмитро Швецов*)

Задача 3. Точка M — середина бічної сторони CD трапеції $ABCD$, точка K — основа перпендикуляру, проведеного із точки M на сторону AB. При цьому $3BK \leqslant AK$. Доведіть, що $BC + AD \geqslant 2BM$.

Задача 4. Нехай BB_1 і CC_1 — висоти гострокутного трикутника ABC. Із точки B_1 опущено перпендикуляри B_1E та B_1F відповідно на сторони AB і BC трикутника, а із точки C_1 — перпендикуляри C_1K і C_1L на сторони AC і BC відповідно. Виявилось, що прямі EF і KL перпендикулярні. Знайдіть величину кута A трикутника ABC.

(*Олександр Дзюняк*)

Задача 5. Нехай AL — бісектриса трикутника ABC. Коло ω_1 є описаним навколо трикутника ABL. Дотична до ω_1 в точці B перетинає продовження AL в точці K. Коло ω_2, описане навколо трикутника CKL, вдруге перетинає ω_1 в точці Q, причому Q лежить на стороні AC. Знайдіть величину кута ABC.

(*Владислав Радомський*)

Задача 6. В трикутнику ABC проведено висоти BD і CT, вони перетинаються в точці H. Точка Q є основою перпендикуляра, опущеного з точки H на бісектрису кута A. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута A трикутника ABC, бісектриса кута BHC і пряма QM, де M — середина відрізка DT, перетинаються в одній точці.

(*Матвій Курський*)

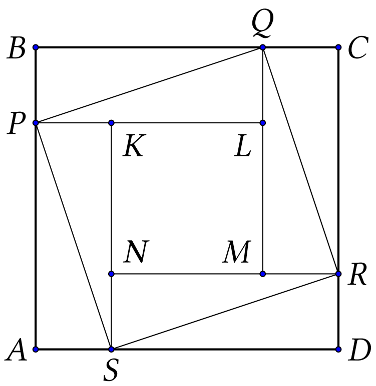
IV Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи

I тур

Задача 1. Квадрат $ABCD$ розбили на 8 однакових прямокутних трикутників і квадрат $KLMN$, як показано на рисунку. Знайдіть площу квадрата $ABCD$, якщо $KL = 5$, $PS = 8$.



Задача 2. Нехай $ABCD$ — квадрат, точка E — середина сторони BC. На стороні AB позначили таку точку F, що $FE \perp DE$. Доведіть, що $AF + BE = DF$.

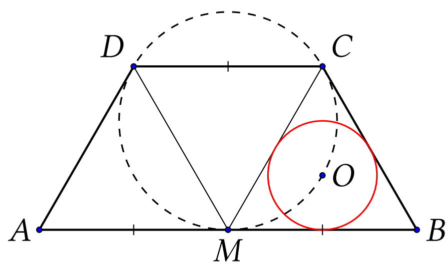
(*Ercole Suppa, Italy*)

Задача 3. Дано трапецію $ABCD$ із основами BC і AD. Точки K і L обрано на бічних сторонах AB і CD відповідно так, що $KL \parallel AD$. Виявилось, що площі чотирикутників $AKLD$ і $KBCL$ рівні. Знайдіть довжину KL, якщо $BC = 3$, $AD = 5$.

Задача 4. В рівнобедреній трапеції $ABCD$ основа AB в два рази більша за основу CD. Точка M — середина AB. Відомо, що центр кола, вписаного в трикутник MCB, лежить на колі, описаному навколо трикутника MDC. Знайдіть кут MBC.

Задача 5. Відомо, що у чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, окрім того $\angle A = \angle C$. Доведіть, що $AB = BC$, $CD = DA$.

(*Олена Артемчук*)



Задача 6. Куб, ребро якого дорівнює 1, перетнули площиною, яка не проходить через жодну з його вершин, а його ребра перетинає лише в точках, що є серединами цих ребер. Знайдіть площу утвореного перерізу. Розгляньте усі можливі випадки.

(*Олександр Школьний*)

IV Олімпіада геометричної творчості імені В. А. Ясінського

Змагання із розв'язування геометричних задач

10–11 класи (поглиблене вивчення математики)

I тур

Задача 1. Дано гострокутний трикутник ABC. Вписане в трикутник ABC коло із центром в точці I дотикається сторін AB, BC в точках C_1 та A_1 відповідно. Прямі A_1C_1 та AC перетинаються в точці Q. Доведіть, що кола, описані навколо трикутників AIC і A_1CQ, дотикаються.

(*Дмитро Швецов*)

Задача 2. На середній лінії MN трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) обрано точки F і G так, що $\angle ABF = \angle CBG$. Доведіть, що тоді $\angle BAF = \angle DAG$.

(*Дмитро Прокопенко*)

Задача 3. Відрізки BF і CN — висоти в гострокутному трикутнику ABC. Пряма OI, яка з'єднує центри описаного та вписаного кіл трикутника ABC паралельна до прямої FN. Знайдіть довжину висоти AK в трикутнику ABC, якщо радіуси його описаного та вписаного кіл дорівнюють R та r відповідно.

(*Григорій Філіпповський*)

Задача 4. Висоти гострокутного трикутника ABC перетинаються в точці H. На відрізках BH та CH позначили точки B_1 та C_1 відповідно так, що $B_1C_1 \parallel BC$. Виявилося, що центр кола ω, описаного навколо трикутника B_1HC_1, лежить на прямій BC. Доведіть, що коло Γ, яке описане навколо трикутника ABC, дотикається кола ω.

Задача 5. Про трикутник ABC відомо, що $3 \cdot BC = CA + AB$. Нехай A-симедіана трикутника ABC перетинає описане коло трикутника ABC в точці D. Доведіть, що

$$\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD} = \frac{6}{AD}.$$

Примітка. Якщо AM — медіана трикутника, то промінь, який симетричний променю AM відносно бісектриси кута A трикутника, називається A-симедіаною трикутника ABC.

(*Ercole Suppa, Italy*)

Задача 6. В нерівнобедреному трикутнику ABC I — центр вписаного кола, M_1 — середина сторони BC, K_2, K_3 — точки дотику вписаного кола трикутника з відрізками AC і AB відповідно. Точка P лежить на описаному колі трикутника BCI, а кут M_1PI — прямий. Доведіть, що прямі BC, PI, K_2K_3 перетинаються в одній точці.

(*Михайло Плотніков*)