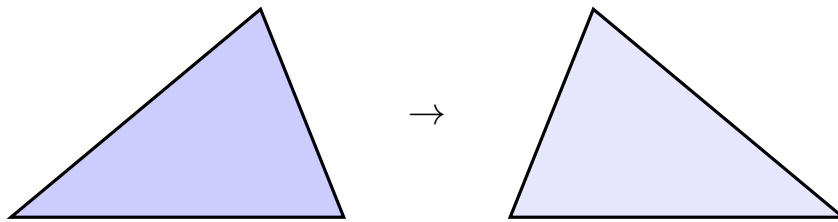


Завдання
V Турніру студентів-математиків
Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського

1. **«Незвична побудова».** Дано еліпс і точку M поза еліпсом. Як побудувати з допомогою циркуля та лінійки дотичні до цього еліпса, які проходять через точку M ?

2. **«Розріжте трикутник».** Дано трикутник. Чи можна його розрізати на частини так, щоб із цих частин (не перевертаючи їх) можна було б скласти новий трикутник, який є дзеркальним відображенням вихідного?



3. **«Змагання із експериментами».** Два спортсмени Андрій і Борис двічі бігли дистанцію у 200 м. У першому забігу Андрій, як більш досвідчений спортсмен, дав фору супернику у 2 секунди і навіть дозволив Борису почати біг із позначки 8 м. В результаті Андрій все рівно випередив Бориса, фінішувавши двома секундами раніше. Наступного разу він дав Борису фору у 16 метрів і 5 секунд, але цього разу в момент фінішу Бориса Андрій відставав від нього на 20 м. Із якими швидкостями бігли спортсмени?

4. **«Магія числа 24».** Помітимо, що число 96 ділиться на 24, а сума усіх натуральних дільників числа 95 (вона дорівнює $1 + 5 + 19 + 95 = 120$) також ділиться на 24. Чи правда, що обов'язково якщо число $n + 1$ ділиться на 24, то сума усіх дільників числа n також ділиться на 24?

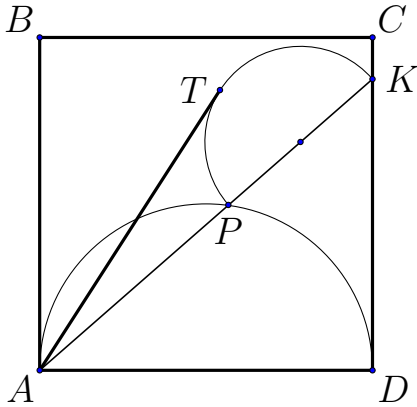
5. **«Дивна система».** Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 3,9, \\ y + [z] + \{x\} = 3,5, \\ z + [x] + \{y\} = 2 \end{cases}$$

(тут $[a]$ позначає найбільше ціле число, що не перевищує a , $\{a\} = a - [a]$ — дробова частина числа a).

6. **«Майже ціле число».** Доведіть, що у числа $(6 + \sqrt{37})^{999}$ перші 999 цифр справа після коми — нулі.

7. «Нова задача Катріони Ширер». Дано квадрат $ABCD$ зі стороною 10 (див. рисунок). На стороні CD обрано точку K . Півколо, яке побудоване на стороні AD як на діаметрі, перетинає відрізок AK в точці P . На відрізку PK як на діаметрі побудовано коло, а з точки A проведено дотичну AT до цього кола. Знайдіть довжину дотичної AT .



8. «Один, два, три — почали!». Чи існує в трикутнику Паскаля рядок, у якому є три послідовні члени, які відносяться як $1 : 2 : 3$?

9. «Максимум». Знайдіть найбільше значення функції

$$f(x) = 4\sqrt{1 - x^3} + 2\sqrt{x^3 + 19}.$$

10. «Тригонометричний сюрприз». Послідовність (a_n) означена рекурентно: $a_1 = 1$, $a_{k+1} = \cos(\operatorname{arctg} a_k)$ (для всіх $k \geq 1$). Дослідіть, чи є збіжною ця послідовність, і у випадку позитивної відповіді знайдіть її границю.